数理解析研究所講究録
13巻 1966年 31-40

解析空間のTangent Coneについて

東京大学
教養部　笠　原　乾　吉

§1. 接ベクトル，接空間などを，解析空間において定義し，特異点の近傍の状態や写像の局所的性質などを調べようとするのは当然であろう。部分的にはいろいろ試みがあつたにちがいないが，まとまつた研究は数年前から始つた。現在までにえられた結果を概観するのがこの講演の目的である。

まず，特異点において接ベクトルをどのように定義するかが問題である。最近，Whitney〔5〕は，いろいろと提案しているが，今までのところ調べられているのは代数幾何でいわれるtangent vector と tangent cone であり，それも後者はごく最近のWhitney の研究〔5，6〕だけのように思われる。

§2. "接ベクトル"

$(X, \mathcal{O}_X)$をreduced analytic space とする。$\mathcal{O}_X$はX上の正則函数芽の層で，$x \in X$における正則函数芽の全体を$\mathcal{O}_{X,x}$とかく。$\mathcal{O}_{X,x}$は局所環で，その極大idealを$\mathfrak{m}_x$とすると，$\mathfrak{m}_x$はxで値0をとる正則函数芽の全体で$\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x = \mathbb{C}$（複素数体）となる。

定義　次の条件をみたす写像$t: \mathcal{O}_{X,x} \to \mathbb{C}$の全体を$T_X(X)$とかく。

(i) $\mathbb{C}$-linear

(ii) $t(fg) = f(x)\cdot t(g) + t(f)\cdot g(x)$, $({}^{\forall} f, g \in \mathcal{O}_{X,x})$

$T_x(X)$は$\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$（これは複素ベクトル空間になる）のdual space と同型になることを注意しておく。$t \in T_x(X)$は定数及び$\mathfrak{m}_x^2$の元に対しては0を対応させるからである。

$T(X) = \bigcup_{x \in X} T_x(X)$とおく。（$T_x(X)$の元を，$x \in X$におけるXの"接ベクトル"というが，他の定義もあり，くいちがいがあるからここでは命名しないことにする。）

$(Y, \mathcal{O}_Y)$を別のreduced analytic space とし，$\tau: X \to Y$を正則写像とする。

$$d\tau_x(t)(f) = t(f\circ\tau),\ (t\in T_x(X),\ f\in\mathcal{O}_{Y,\tau(x)}$$

によって，$d\tau_x : T_x(X) \to T_{\tau(x)}(Y)$ が定義され $\mathbb{C}$－linear である。これから $d\tau : T(X) \to T(Y)$ が定義される。

正則写像の合成に対し，$d(\sigma\circ\tau) = d\sigma\circ d\tau$ が成立する。

XがYの部分空間でI_X をideal の層とするとき，(即ち，$\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y/I_X\,|\,X$，)
$i : X \to Y$ を自然なinjection とすれば $di_x : T_x(X) \to T_x(Y)$ もinjection で，像は

$$I_m di_x = \left\{\tilde{t}\in T_x(Y)\ \middle|\ \tilde{t}(f_\nu) = 0\ ;\ f_\nu,\ (\nu=1,2,\cdots k)\ \text{は}\ I_{X,x}\text{の生成元}\right\}$$

となる。$T_x(X)$ は $T_x(Y)$ の線型部分空間とみなしうる。

<u>定理</u> T (X) に解析的構造を入れ，自然な射影 $\pi : T(X) \to X$ 及び，正則写像 $\tau : X \to Y$ に対する $d\tau : T(X) \to T(Y)$ が正則になるようにできる。

概証： Xが $\mathbb{C}^n$の領域Dのとき，$D\times\mathbb{C}^n \ni (x, v)$ に $\sum_i v^i \frac{\partial}{\partial z_i}\Big|_x \in T_x(D)$ を対応させると，bijective であり，これで $D\times\mathbb{C}^n$ の構造をT (D) に入れる。

Xが $\mathbb{C}^n$の領域D内の解析的集合Aのとき，Dを小さくしてideal の層I_AはD内の正則函数$f_1, \cdots, f_k$により各点で生成されるとしてよい。$T(A) \xrightarrow{di} T(D) \simeq D\times\mathbb{C}^n$ (i は $A\to D$ の自然なinjection) によるT (A) の像をみると

$$\left\{(x, v)\in D\times\mathbb{C}^n\ \middle|\ x\in A,\ \sum_i v^i \frac{\partial f_k}{\partial z_i}\Big|_x = 0\quad (\kappa = 1,2,\cdots k)\right\}$$

となり，$D\times C^n$ 内の解析的集合である。これでT (A) に解析的構造を入れる。あとは省略。

T (X) の正則なsection の全体を $\mathfrak{X}(X)$ とおく。次のことはすぐにわかる。($\mathfrak{X}(X)$ の元を〝正則ベクトル場〟といってもよい。)

$\xi\in\mathfrak{X}(X) \underset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\xi : X \to T(X)$，正則で $\xi(x)\in T_x(X)$

$\Longleftrightarrow$ ξ は各 $x\in X$ に $\xi_x \in T_x(X)$ を対応させる写像で，開集合 $^\forall U\subset X$ と $^\forall f\in\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ に対し$\xi f(x) = \xi_x f_x$ で定義されるξf は $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ の元になる。

$\Longleftrightarrow$ ξは $\mathcal{O}_X$から$\mathcal{O}_X$への $\mathbb{C}$－vector spaces の層としての準同型写像で

$\xi(fg)=\xi(f)\cdot g+f\cdot\xi(g)$, $({}^{\forall}f, g\in\mathcal{O}_{X,x};\ {}^{\forall}x\in X)$
が成立する。

$T(X)$ の正則な sections の芽が作る X 上の層（集合の層）を $\mathfrak{X}_X$ とかく。$\mathfrak{X}(X)=\Gamma(X,\mathfrak{X}_X)$ である。

<u>定理</u> $\mathfrak{X}_X$ は自然に $\mathcal{O}_X$－modules の層（i.e. 解析的層）となり coherent である。(Rossi〔4〕)

<u>系</u> XをStein 多様体とし，YをXのanclytic subspace とする。このとき，${}^{\forall}\xi\in\mathfrak{X}(Y)$ に対し ${}^{\exists}\tilde{\xi}\in\mathfrak{X}(X)$ があり，$di\circ\xi=\tilde{\xi}\circ i$ とできる。($i:Y\to X$ 自然なinjection)。

証明 $\mathfrak{X}'_{X,x}=\mathfrak{X}_{X,x}\ :x\notin Y$

$\{t\in\mathfrak{X}_{X,x}\mid t(f)=0,\ {}^{\forall}f\in I_{Y,x}\}$

とおく。(I_YはYの ideal の層。) これは連接層で $\mathfrak{X}'_X\to\mathfrak{X}_Y\to 0$ ($x\notin Y$で，$\mathfrak{X}_{Y,x}=0$とする。) という完全列より $\Gamma(X,\mathfrak{X}'_X)\to\Gamma(X,\mathfrak{X}_Y)\to 0$という完全列をうる。(Rossi〔4〕 を参照。)

$\mathfrak{X}_{X,x}$の元（i.e. $x\in X$の近傍での"正則ベクトル場"）が存在するかどうかについて次の定理がある。

<u>定理</u> $\xi_1,\cdots,\xi_k\in\mathfrak{X}_{X,x}$があり，$\xi_1(x),\cdots,\xi_k(x)$ が$T_x(X)$ で1次独立である。

$\Longleftrightarrow$ k次元複素多様体Mと解析空間Vがあり，xの∃近傍UがM× Vと解析的同型になる。
(Rossi〔4〕)

証明 $\Longleftarrow$ は明らか。$\Longrightarrow$ をいう。X $X=A\subset D\subset\mathbb{C}^n$としてよい。(Aは領域D内の解析的集合。) Dを小さくして，Aに対応するideal の層I_A は$f_1,\cdots,f_\rho\in\Gamma(D,\mathcal{O}_D)$で生成され，$\xi_1,\cdots,\xi_k$ は $\mathfrak{X}(D)$ の元に延長されているとしてよい。座標をうまくとり，$\xi_1=\dfrac{\partial}{\partial z_1}$ とできる。(Chevalley : Lie groups I. p.89 をみよ。)

$\xi_1\in\mathfrak{X}(A)$ よりA上 $\dfrac{\partial f_\nu}{\partial z_1}\equiv 0$ となり，故に $\dfrac{\partial f_\nu}{\partial z_1}\in\Gamma(D,I_A)$でしたがってA上 $\dfrac{\partial}{\partial z_1}\left(\dfrac{\partial f_\nu}{\partial z_1}\right)\equiv 0$ となる。これをくりかえして，A上 $\dfrac{\partial^\lambda f_\nu}{\partial {z_1}^\lambda}\equiv 0$ ($\lambda=1,2,\cdots,\nu=1,2,\cdots,\rho$) をうる。$M_1=\{z_2=\cdots=z_n=0\}$, $V_1=A\cap\{z_1=0\}$とおくと，

$(z_1, z_2, \dots, z_n) \to (z_1, 0, \dots, 0) \times (0, z_2, \dots, z_n)$によつて $A \cong M_1 \times V_1$ となる。ξ_2 をV_1 で考え，くりかえしていけばよい。

定理 $x \in X$ でのXの既約成分の次元のうち最小をrとする。このとき，xの近傍vと，$\xi_1, \dots, \xi_k \in \mathfrak{X}(U)$ があり，U内の，次元が r の通常点yでは$\xi_1(y), \dots, \xi_k(y)$ が $T_y(X)$ をはり，その他の点では$\xi_1, \dots, \xi_k$ はみな0になる。(Whitney [6] Lemma 15.1)

X全体について，$\mathfrak{X}(X)$ の元の存在は，Xのautomorphism と関係がありKaup の研究 [2, 3] がある。

$\tau : X \to Y$を正則写像として，$x \in X$の近傍Uがあり，$\tau(U)$ は$\tau(x)$ の近傍内の解析的集合で，τの制限 $\tau|U$ がUから$\tau(U)$ への解析的同型になるとき，仮に，τはxでregular であるということにする。

定理 (i) xがXの通常点 $\iff \dim_{\mathbb{C}} T_x(X) = \dim_x X$

(ii) $\dim_{\mathbb{C}} T_x(X) \leqq d \iff$ xのある近傍が $\mathbb{C}^d$ へregular に写せる。

(iii) 正則写像 $\tau : X \to Y$ が $x \in X$ でregular

$\iff d\tau_x : T_x(X) \to T_{\tau(x)}(Y)$ が injective

(iv) A_iを $\mathbb{C}^{n_i}$の領域内の解析的集合 $(i=1, 2)$とし，τをA_1 からA_2 の正則写像とする。$x \in A_1$ とし$\dim T_x(A_1) = n_1$ とし，τはxでregular とせよ。τを $\mathbb{C}^{n_1}$内のxの近傍から $\mathbb{C}^{n_2}$ への正則写像に拡張すると，その写像はxでregular である。

証明 (ii) $X = A \subset D \subset \mathbb{C}^n$,（Aは領域D内の解析的集合），$\dim T_x(A) < n$とせよ。$T_x(A) \subsetneqq T_x(D)$ より，$\exists t \in T_x(D)$ $\exists f \in I_{A,x}$, $t(f) \neq 0$ とできる。（I_Aはideal の層）。tは $\sum_i a^i \frac{\partial}{\partial z_i}$ であるから，$z_1, \dots, z_n$ を座標で $z_n = f$ にとることができる。$A \subset \{z_n = 0\}$ となり，Aは $\mathbb{C}^{n-1}$ にうめこまれる。

(iii) $d = \dim T_x(X)$, $d' = \dim T_{\tau(x)}(Y)$とし，x，$\tau(x)$ の近傍を $\mathbb{C}^d$, $\mathbb{C}^{d'}$ 内の局所解析的集合とみなし，τを $\mathbb{C}^d$ 内のxの近傍から$\mathbb{C}^{d'}$ への正則写像$\tilde{\tau}$に延長しておく。右図より，$d\tau_x$ がinjective なら$d\tilde{\tau}_x$ もそうなり，$\tilde{\tau}$ はregular でτもregular になる。逆は明らか。

$$\begin{array}{ccc} T_x(\mathbb{C}^d) & \xrightarrow{d\tilde{\tau}_x} & T_{\tau(x)}(\mathbb{C}^{d'}) \\ \| & & \| \\ T_x(X) & \xrightarrow[d\tau_x]{} & T_{\tau(x)}(Y) \end{array}$$

(i)は(ii)から，(iv) は (iii) と同様にして容易である。

定義　$\tau: X \to Y$を正則写像とし，$x \in X$とする。次のようにおく。

$$\mathrm{rank}_x(\tau) = \dim \mathrm{Im}\, d\tau_x, \quad \mathrm{corank}_x(\tau) = \dim \ker d\tau_x.$$

この定義から，$\mathrm{rank}_x(\tau) + \mathrm{corank}_x(\tau) = \dim T_x(X)$ である。このrank の定義は Jacobian matrix によるそれの拡張であり，Remmert による写像のrank とは異なる。多様体の場合によく知られた結果が次のように拡張される。i 次元多重円板をP^iとかくことにする。

定理　$\tau: X \to Y$は正則写像で，$x \in X$の近傍に於てcorank は恒等的にmであるとする。$\dim T_x(X) = n$とし，$x \in X$の近傍vを $\mathbb{C}^n$ の原点の近傍内の解析的集合と同型にとる。両者を同一視し，xは $\mathbb{C}^n$の原点とする。$\mathbb{C}^n$ の座標を $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{n-m} \times \mathbb{C}^m$，$T_x(\mathbb{C}^{n-m} \times \{0\}$　$\ker d\tau_x = \{0\}$になるようにとる。

このとき，原点を中心とする多重円板$P^n = P^{n-m} \times P^m$ を適当にとり，次のようにできる。P^{n-m} 内の解析的集合Sがあり，$U \cap P^n = S \times P^m$ となり，$\tau \mid U \cap P^n$ は，射影 $P^{n-m} \times P^m \to P^{n-m}$ がひきおこす写像　$U \cap P^m \to S$と，$\exists$解析的同型写像$S \to \tau(U \quad P^n)$との合成になる。($\tau(U \cap P^n)$ はYの局所解析的集合になる)。(Holmann〔1〕)

この定理の応用として，LをXの複素変換群とし，$^\forall x \in X$に対しorbit $L(x) = \{g(x) \mid g \in L\}$が純m次元であるとすれば，$^\forall x \in X$は$A \times P^m$ (Aは解析空間) と同型な近傍をもち$^\forall a \in A$に対し$\{a\} \times P^m \subset {}^\exists L(g)$となることが示される。

定理　YをXの解析的部分空間で，$r: X \to Y$を正則写像で$r \mid Y$ は恒等写像とする。(即ち，正則なretraction.)　$y \in Y$において，$\dim T_y(Y) = m$，$\dim T_y(X) = n$とし，X上のyの近傍を　$\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{n-m} \times \mathbb{C}^m$ の原点の既傍内の解析的集合と同型で (yは原点)，Yは$\{0\} \times \mathbb{C}^m$に (局所的に) 含まれているようにとる。

このとき，充分小さい (X上の) yの近傍へのrの制限は，射影 $\mathbb{C}^{n-m} \times \mathbb{C}^m \to \{0\} \times \mathbb{C}^m$によつてひきおこされる写像と一致する。(Holmann〔1〕)

これは，Aを$\mathbb{C}^n$ の領域D内の解析的集合とし，$r: D \to A$という正則retraction が存在すればAは特異点をもたず，rのfibre はAの近傍で特異点をもたぬというRossi の結果を含んでいる。

§ 3. Whitney の " 接ベクトル "

Dを $\mathbb{C}^n$ の領域，AをD内の解析的集合としPをAの点とする。

Whitney は $v \in \mathbb{C}^n$ がPにおけるAの "接ベクトル" であるということに，いくつかの定義を試みる。Aの通常点の全体を$\mathring{A}$とおく。

$$C_1(A,p)=\left\{ v \,\middle|\, {}^{\exists}U: p\text{の}\mathbb{C}^n\text{内の近傍},\ {}^{\exists}\widetilde{v}\in\mathfrak{X}(U),\ {}^{\forall}q\in\mathring{A}\text{に対し}\ \widetilde{v}(q)\in T_q(A)\ \text{で},\ \widetilde{v}(P)=v \right\}$$

$$C_2(A,p)=\left\{ v \,\middle|\, q_i\to p\text{となる}\ {}^{\forall}q_i\in\mathring{A}\ \text{に対し}\ {}^{\exists}v_i\in T_{q_i}(A),\ v_i\to v \right\}$$

$$C_3(A,p)=\left\{ v \,\middle|\, {}^{\exists}q_i\in A,\ {}^{\exists}a_i\in\mathbb{C},\ a_i(q_i-p)\to v \right\}$$

$$C_4(A,p)=\left\{ v \,\middle|\, {}^{\exists}q_i\in\mathring{A},\ {}^{\exists}v_i\in T_{q_i}(A),\ q_i\to p,\ v_i\to v \right\}$$

$$C_5(A,p)=\left\{ v \,\middle|\, {}^{\exists}q_i,\ q'_i\in A,\ {}^{\exists}a_i\in\mathbb{C},\ a_i(q_i-q'_i)\to v \right\}$$

$$C_6(A,p)=T_p(A)\ (\subset T_p(\mathbb{C}^n)=\mathbb{C}^n)$$

一般に，$C_1\subset C_2\subsetneq C_3\subset C_4\subset C_5\subset C_6$ が成立する。しかし，証明は（自明の部分もあるが），簡単ではない。（〔5〕の 始めの方に証明の概略があるが，完全には 〔5〕，〔6〕の多くの結果が必要と思われる。C_1 ，C_2 ，C_6 は$\mathbb{C}^n$ の線型部分空間となり，他は cone であり代数的集合になることが示される。

Whitney は $C_3(A,p)$ を主に調べている。まず，二通りの特徴づけが示される。

local ring $\mathcal{O}_{A,p}$ の associate graded ring $\mathfrak{A}=\mathbb{C}\cup\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2\cup\mathfrak{m}_p^2/\mathfrak{m}_p^3\cup$ を考え，$C_3(A,p)\subsetneq C_6(A,p)=T_p(A)\xrightarrow{\sim}(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^*$ により$C_3(A,p)$ を $(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^*$ の部分集合とみなすとき

$$C_3(A,p)=\left\{ t\in(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^* \,\middle|\, t\text{は}\ \mathfrak{A}\to\mathbb{C}\ \text{の ring homomorphiom に拡張できる} \right\}$$

となる。

$f\in\mathcal{O}_{D,p}$に対し，fをP中心のTaylor 級数に展開し次数の等しい項をまとめたとき，o でない最低次の項をfのpにおける initial polynomial といってf_p^* とかくことにする。DにおけるAの ideal の層をI_Aとする。$C_3(A,p)$ は，$I_{A,p}$に属する ${}^{\forall}f$ に対する

f_p^* の共通零点集合と一致する。($I_{A,p}$ がprincipal ideal のときは生成元 f に対する f_p^* の零点が C_3 (A, p) になるが，一般には，$I_{A,p}$ の生成元だけでは不足である。$C_6(A, p)=T_p(A)$ は $I_{A,p}$ に属する f に対する f_p^* のうち，一次式であるものだけの共通零点である。)

n 次元複素射影空間を $\mathbb{P}^n$ とかき，$\mathbb{P}^n$ 内の r 次元線型部分空間の集合を $G^{n,r}$ とかき普通に位相を入れる。(グラスマン多様体である。) $\mathbb{C}^n$ の r－plane を (原点を通るように平行移動して) $\mathbb{P}^{n-1}$ の (r－1) 次元部分空間とみなし，さらに $G^{n-1,r-1}$ の点とみなしたりする。原点でない $v\in\mathbb{C}^n$ は，o と v を通る直線を考えることにより，$\mathbb{P}^{n-1}$ の点に対応する。$\mathbb{C}^n$ 内の原点を頂点とする cones は，$\mathbb{P}^{n-1}$ 内の部分集合と 1 : 1 に対応する。cone C_3 (A, p) に対応する $\mathbb{P}^{n-1}$ の部分集合を $C_3^*(A, p)$ とかく。

$C^{*n}(p)=\{(q,\nu)\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{P}^{n-1}\mid q-p$ と ν とは従属$\}$とおき，$\pi: C^{*n}(p)\to\mathbb{C}^n$ を射影とおくと，$q\neq p$ なら $\pi^{-1}(g)$ は 1 点で，$\pi^{-1}(p)=p\times\mathbb{P}^{n-1}$ となり，π は正則で proper な写像となり，$p\times\mathbb{P}^{n-1}$ を除くと biholomorphic である。($C^{*n}(p)$ は $C^n\times P^{n-1}$ の解析的集合である。π は proper modification の一種で，これは Hopf の σ－process とよばれているものである)。

さて，$A_p^*=\{C^{*n}(p)\cap(A\times\mathbb{P}^{n-1})\}-(\{p\}\times\mathbb{P}^{n-1})$，(閉包は $D\times\mathbb{P}^{n-1}$ 内でのもの，これは $D\times\mathbb{P}^{n-1}$ 内で解析的)，とおくと，$\pi\mid A_p^*: A_p^*\to A$ は p の原像を除き biholomorphic である。p の原像が $p\times C_3^*(A, p)$ になることが示され，これから $\dim C_3^*(A, p)=\dim_p A-1$，したがって $\dim C_3(A, p)=\dim_p A$ が示される。

この方法の系として，A が p で既約なら $C_3^*(A, p)$ が連結になることから，o でない ${}^\forall v\in C_3(A, p)$ に対し，p を端点とする A 内の arc $\Gamma: \Phi(\lambda)$，$o\leq\lambda\leq 1$，$\Phi(o)=p$ をとり，$\lim_{\lambda\to o}\dfrac{\Phi(\lambda)-p}{\lambda}=v$ とできることがわかる。

§4. Whitney の stratification

前節に続いて Whitney の研究の紹介を続ける。$A\subset D\subsetneq\mathbb{C}^n$ を前節う同じとし，ここでは，A は純 r 次元と仮定する。D 内の特異点をもたぬ純次元局所解析的集合を manifold ということにする。

A の stratification (層にわけること)，即ち，A を manifolds の合併集合にばら

ばらにし（各manifold を stratum という），その状態で特異点の様子などを調べたい。最近，Zariski は equisingularity という概念を導入し，別のstratification を試みているが（Amer. J. Math. 1965），Whitney は次のようにする。

$\mathfrak{M} = \{M_i\}_{i \in I}$ を manifolds の集合とする。

(i) $A = \bigcup_{i \in I} M_i$，disjoint sum で locally finite（即ち，$i \neq j$ なら $M_i \cap M_j = \phi$，各 $x \in A$ に近傍Uがとれ，$U \cap A_i \neq \phi$ となる i は有限 ）。

(ii) $\overline{M}_i$ 及び $\overline{M}_i - M_i$ はD内の解析的集合。（ $^{\forall} i \in I$，閉包はD内でのもの。）

(iii) $i \neq j$，$\overline{M}_i \cap M_j$，$\dim M_i > \dim M_j$.

(iv) $i \neq j$，$\overline{M}_i \quad M_j$，$\dim M_i = m$ のとき，$^{\forall} P \in M_j$ と任意にm－plane T を与える。$\overline{M}_i$ の通常点 q_ν を $q_\nu \to p$，$T_{q_\nu}(\overline{M}_i) \to T$ （in $G^{n-1, m-1}$）にとれるならば，$T_p(M_j) \subset T$ となる。

(v) $i \neq j$，$\overline{M}_i \supset M_j$，$\dim M_i = m$ とし，任意に $p \in M_j$ と $v \in \mathbb{C}^n$ をとり，任意にm－plane T をとる。このとき，M_j の点 P_ν と $\overline{M}_i$ の通常点 q_ν と複素数 a_ν をとり，$p_\nu \to p$，$q_\nu \to q$，$a_\nu(p_\nu - q_\nu) \to v$，$T_{q_\nu}(\overline{M}_i) \to T$ とできれば，$v \in T$ となる。

Whitney は，(i)，(ii) をみたす $\mathfrak{M}$ は細分して(iii) をみたすようにでき，(i)，(ii)，(iii) をみたす $\mathfrak{M}$（これをAのstratification とよぶ）は細分して(iv)，(v)をみたすようにできることを示し，結局Aに対し(i)～(v)をみたす $\mathfrak{M}$（regular stratification という）の存在を示す。これが〔6〕の主定理である。

regular stratification の存在を用いて，特異点の近傍の状態や，$C_i(A, p)$ のことが若干調べられる。例えば，$^{\forall} P_0 \in A$，$^{\forall} \varepsilon > 0$ に対し，$^{\exists} \delta > 0$ をとり，$d(p, p_0) < \delta$ をみたすAの通常点 $^{\forall} p$ に対し $^{\exists} v \in T_p(A)$ があり $d^*(p - p_0, v) < \varepsilon$ となる。（d，d^* は $\mathbb{C}^n$，$\mathbb{P}^{n-1}$ の距離）。Bをpを通りAに含まれる解析的部分集合とすると $C_4(B, p)$ $C_4(A, p)$ となる。etc.

さて，各 $p \in A$ の上に $C_i(A, p)$ をのせたfibre space を考えよう。

$$C_i(A) = \{ (p, v) \in A \times \mathbb{C}^n \mid v \in C_i(A, p) \} \qquad (i = 1, 2, \cdots, 6)$$

とおく。$C_6(A) = T(A)$ が $D \times \mathbb{C}^n$ で解析的になることはすでに示したが，$C_4(A)$ と $C_5(A)$

もそうなることが示される。特に，Aの特異点集合をSとするとき，C_4 (A) はT (A－S) を含む最小の解析的集合である。

C_3 (A) は$D\times\mathbb{C}^n$ で解析的でない。$\mathbb{C}^4$ で

$$A=\{t^2y^2-t^2x^2+x^3-y^4=0\}$$

を考えると，$C_3(A,(0,0,0,0))=\{x=0\}$，　$t\neq 0$　のとき

$C_3(A,(0,0,0,t))=\{y=\pm x\}$　で，C_3 (A) は閉集合でない。

§5. semi-analytic fibration

$A\subset D\subset\mathbb{C}^n$ は前節と同じで $\mathcal{M}$ をAのstratification (即ち，前節(i)(ii)(iii)をみたす)とする。$P_0\in M\in\mathcal{M}$ のとき，P_0 の近傍U_0 を次のようにとれるとき，P_0 で $\mathcal{M}$ と consistent な semi-analytic fibration があるという。

Nを P_0 でのMのorthogonal plane とし，$M_0=M\cap U_0$，$N_0=N\cap U_0$ とおく。bijection $\phi:M_0\times N_0\longrightarrow U_0$ が存在し，各$q\in N_0$ に対し，$F(q)\ \{\phi(p,q)\mid P\in M_0\}$とおくとき，

(i)　$P\in M_0$ を固定すると，ϕはqについて連続，

(ii)　$q\in N_0$ を固定すると，ϕはPについて正則で，M_0 からF (q) への解析的同型になる。

(iii)　各$M'\in\mathcal{M}$と各$q\in N_0$ に対し，$F(q)\cap M'=\phi$　か又は$F(q)\subset M'$ のどちらかである。

が成立する。

semi-analytic fibration があれば，$\mathcal{M}$ は前節の (iv) をみたすことはわかる。(v)との関係は不明である。

Whitney はAが純n－1次元のとき，stratification ${}^{\forall}\mathcal{M}$を細分して，純n－2次元である ${}^{\forall}M\in\mathcal{M}$の各点にsemi-analytic fibration が存在するようにできることを示している。これは，Zariski の equisingularity によるstratification の例にもなつており興味深い。

後記　differential form について何もふれなかつた。Rossi [4] や，Grauert－Kerner, Math. Ann., 153 (1964) 236－260 などに記述がある。

"正則ベクトル場" $\mathfrak{X}$ (X) は [X, Y] = XY − YX によりLie algebra になるが，これと，XのLie transformation group との間に関係があり（多様体のときと同様な），これをKaup [2, 3] が調べている。特に [3] ではreduced でない一般の解析空間で議論を行なつている。

文　献

(1) H.Holmann : Local properties of holomorphic mappings, Conferemce on complex analysis, Minneapolis 1964, pp. 94-109

(2) W.Kaup : Holomorphe Vektorfelder und Transformations gruppen komplexer Räume, Münster or Schriftenreihe, Heft 24, 1963.

(3) W.Kaup : Infinitesimal Transformationsgruppen Komplexer Räume. Math. Ann. 160 (1965). pp. 72-92.

(4) H.Rossi : Vector fialds on analytic spaces, Annals of Math. 98 (1963), pp. 455-467.

(5) H.Whitney : Local properties of analytic varieties, Differential and combinatorial topology, Princeton, 1964, pp. 205-244,

(6) H.Whitney : Tangents to an analytic variety, Annals of Math. (1965) pp. 496-549.